

УДК 519.95

## МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ И КИНЕТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РОСТА БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ

© А.А. Арзамасцев, Д.В. Слетков, Ю.Н. Мотлых, Е.С. Яблокова, И.С. Косова

Arzamastsev A.A., Sletkov D.V., Motlyh Y.N., Yablokova E.S., Kosova I.S. Morphological and kinetic peculiarities of growth of biological objects on a plane. Experimental researches of growth of biological objects on a plane base are carried out. Special programs that allow receiving dynamics of morphological and kinetic parameters on the basis of digital photos are developed. Conformity of the forms received in the experiment to results of calculation on mathematical model is shown.

**Введение.** При анализе изображений объектов в различных областях знаний часто возникает проблема нахождения соответствующей числовой характеристики, которая комплексно определяла бы его морфологические и другие особенности. Такие задачи возникают, например, при распознавании образов, в физике твердого тела, когда по изображению объекта делаются выводы о его текущем состоянии и возможных сценариях развития.

Другим примером являются растущие на плоскости колонии биологических объектов. В этом случае числовая оценка изображений может дать информацию не только об их морфологических особенностях, но и о значениях некоторых скрытых факторов, коррелирующих с ними.

По этой причине разработка алгоритмов и программ, предназначенных для анализа морфологических особенностей объектов и математических моделей, пригодных для исследования связи морфологических, кинетических и других параметров, представляет собой актуальную научную проблему.

Решение таких задач имеет большое значение для распознавания образов и управления биотехнологическими процессами, т. к. по цифровым фотографиям объектов с помощью компьютерных технологий можно судить о состоянии популяции и принимать решения о соответствующих управляющих воздействиях.

Существующие методы анализа изображений пригодны для решения указанных задач не в полной мере, а отсутствие соответствующих математических моделей и программного обеспечения не позволяет делать выводы о существовании корреляций морфологических и иных факторов.

Возможным методом комплексной оценки морфологии объекта является подсчет фрактальной размерности его изображения, предложенный Мандельбротом. Этот метод позволяет оценивать фрактальную размерность для математических объектов. Однако для растровых изображений, соответствующих представлению графической информации на компьютерах или в цифровых камерах, указанные алгоритмы не могут быть непосредственно применены вследствие того, что в данном случае по существу имеет место не математический объект, а его приближение на дискретной сетке. При этом возникает необходимость в адаптации суще-

ствующих алгоритмов вычисления фрактальной размерности для растровых изображений.

Необходимо отметить, что данная работа является составной частью исследований по математическому и компьютерному моделированию колоний биологических объектов, растущих на плоскости, а также экспериментальному исследованию таких объектов [1–11]. Работы проводятся на кафедре компьютерного и математического моделирования Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина с 2001 года. Основная идея исследований заключается в том, чтобы на основе внешнего вида популяций биологических объектов (морфологические показатели) можно было бы делать выводы о кинетических показателях: скорости роста, взаимодействия с окружающей средой и другими биологическими объектами. Однако публикаций, связывающих морфологические и кинетические параметры, в литературе недостаточно.

Данная работа посвящена следующим аспектам: экспериментальному изучению динамики роста биологических объектов на плоскости; получению количественных характеристик (размеры, площадь колонии, анализ фрактальной размерности); сопоставлению форм объектов, полученных в ходе моделирования и в эксперименте.

### 1. Фрактальная геометрия и ее возможности.

При анализе изображений различных объектов возникает проблема нахождения числовой характеристики, которая комплексно характеризует их морфологические и другие особенности.

Подобные задачи в принципе могут быть решены на основе анализа фрактальной размерности изображений (*Mandelbrot 1982; Федер 1991*).

Понятия «фрактал» и «фрактальная геометрия» (от латинского fractus – разбитый, поделенный на части) относятся к категории достаточно новых. Они впервые были введены Мандельбротом в 1982 году (*Mandelbrot 1982*). Было показано, что к ним примыкают некоторые уже известные математические и физические понятия, такие как динамический хаос, хаотическая динамика и отдельные примеры «математических монстров». Однако до Мандельброта никто не связывал их воедино. Важность совместного изучения этих явлений состоит в том, что они фактически являются примерами схожих по сути систем. Позже примеры подобных систем были

найжены и в других областях науки (в биологии (Гудак-кова и Божокин 1991; Божокин 1996; Obert etc. 1990; Matsuyama, Matsushita 1993), в геологии (Turcotte 1992; Запивалов и Смирнов 1995; Голубятников и др. 1996; Запивалов 1996), в психологии (Abraham etc. 1990) и др.).

Исторически развитие данного направления шло по двум путям: математические теории размерности, меры множеств дискретных отображений; понятия в физике о нелинейной динамике, динамическом хаосе, хаотической динамике, возникавшие в различных ее областях (механика, статистическая физика, теория колебаний, гидродинамика).

Особым классом можно выделить итерированные голоморфные отображения. Изначально эта проблема была поставлена Кэли (Cayley 1879), исследовавшим глобальную сходимости итерационного метода Ньютона-Фурье в комплексной плоскости, однако, тривиально решив задачу для квадратного полинома, Кэли не смог решить ее для полиномов степени больше двух. Значительного прогресса в изучении итерированных голоморфных отображений добились Гастон Жулиа и Пьер Фату. Фату показал (Fatou 1906), что для отображения  $z \rightarrow z^2/(z^2 + 2)$  почти все орбиты при итерациях стремятся к нулю, несмотря на то, что существует канторово множество исключительных точек, для которых орбиты остаются ограниченными от нуля. Позднее Жулиа и Фату ввели понятия «множества Фату» и «множества Жулиа» (Fatou 1919; Julia 1918). Причем множества Жулиа являются дополнением к множеству Фату. Позднее Бенуа Мандельброт построил множество, проясняющее форму и тип множеств Жулиа для различных значений параметра в отображении  $z \rightarrow z^2 + c$ , позже это множество было названо множеством Мандельброта. Множества Жулиа могут представлять собой как замкнутые кривые, так и вполне несвязанные множества (канторово множество), также стоит отметить, что гладкие множества Жулиа являются редкостью, а алгоритмы построения этих множеств являются предметом интереса как математики, так и компьютерной графики, так как позволяют воспроизводить объекты, близкие к природным. Размерность множеств Жулиа в большинстве отлична от топологической, поэтому они являются фракталами, однако об их фрактальной размерности (размерности Хаусдорфа) почти ничего не известно. Однако недавно Д. Рюэль (Pajitgen и Puxter 1993) показал, что для отображения  $z \rightarrow z^2 + c$  и  $|c| \ll 1$

$\dim_H(J_C) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2} + o\left(\frac{1}{4 \log 2}\right)$ . Этот результат является первым в оценке размерности для множеств Жулиа.

Проблема трех тел в небесной механике – первая задача, при исследовании которой возникает сложная динамика и хаос (Poincaré 1892). С развитием вычислительной техники возможности изучения и наглядного представления сложной динамики революционным образом расширились. Одной из первых работ по компьютерному исследованию сложной динамики стала работа, где рассматривается модель движения звезды через галактический диск (Henon, Heiles 1964).

В 1963 году американский метеоролог Лоренц опубликовал статью «Детерминированное непериодическое течение» (Lorenz 1963), в которой обсуждались результаты численного интегрирования с помощью

компьютера системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующей динамику жидкости при конвекции в подогреваемом снизу слое. Лоренц подверг полученные результаты тщательному и глубокому обсуждению, акцентировав внимание на взаимосвязь между наблюдаемой сложной динамикой и присущей системе неустойчивостью фазовых траекторий. Позднее это свойство хаотической динамики получило название «эффект бабочки» (butterfly effect). Позднее Ораевский (Ораевский 1981) также получил непериодические решения для аналогичных уравнений в теории однододового лазера.

В последнее время в компьютерной графике сформировалось направление, называемое фрактальной живописью. Данное направление нашло применение в моделировании ландшафтов, текстур, пейзажей, схожих с природными (Peitgen, Saupe 1988; McGarigal, Marks 1995; Hargrove etc. 2002). Эстетическим и философским аспектам восприятия данного направления как искусства посвящен целый ряд статей (Николаев 2000, 2003).

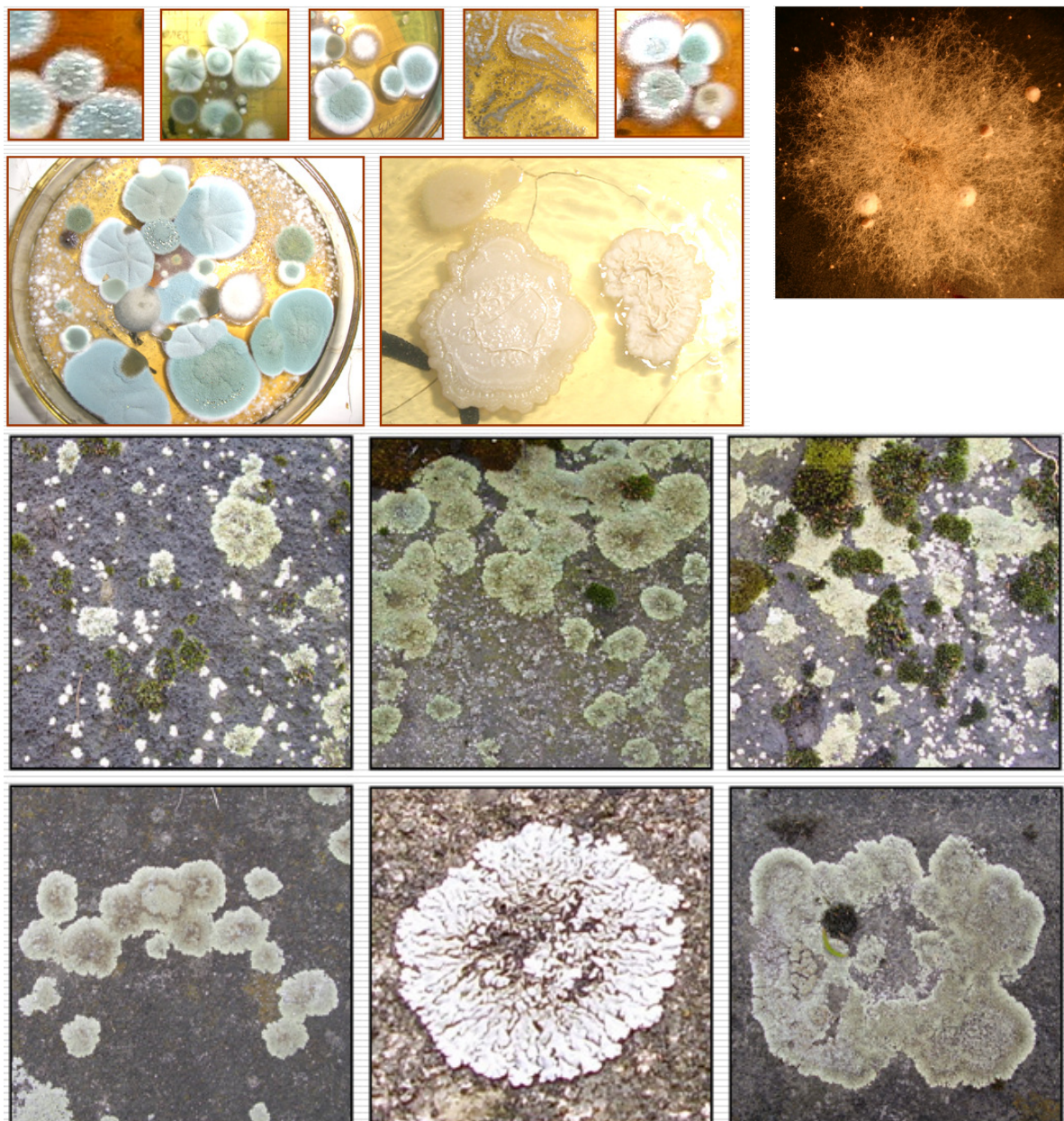
Таким образом, учитывая имеющиеся связи фрактальной геометрии с такими явлениями, как возникновение хаоса при турбулентности и морфогенез многих природных объектов, а также, принимая во внимание принципиальную возможность создания реалистичных моделей пейзажей на компьютере путем использования фракталов, можно констатировать, что использование этого аппарата может оказаться полезным для решения проблем данной работы.

**2. Разнообразие форм биологических объектов, растущих на плоскости, и их фрактальный характер.** Мир микроорганизмов, мицелий и других биологических объектов, растущих на плоскости, чрезвычайно разнообразен. На рис. 1 можно увидеть, насколько неоднородны, индивидуальные и абсолютно неповторимы эти биологические объекты.

Чтобы подтвердить фрактальный характер таких объектов, необходимо убедиться в существовании зависимости длины какого-либо контура такого изображения от масштаба рассмотрения. Так, на рис. 2 показаны фотографии лишайников, сделанные в разных масштабах. Прямоугольниками на них показаны изображения одной и той же области. Простые расчеты показали, что для указанных объектов существует зависимость длины контура от масштаба изображения и, следовательно, данные объекты можно считать фрактальными.

**3. Материалы и методы. Используемые биологические объекты.** В работе использовали микроорганизмы *Aspergillus* (Микель 1729), которые относят к патогенным и условно-патогенным видам: *A. fumigatus*, *A. candidus*, *A. roseus*, *A. flavus*, *A. niger* и др. Описано более 40 видов. У человека они вызывают поражения легких, бронхов, роговицы глаза, наружного слухового прохода и других органов и тканей.

По классификации плесневых грибов данный вид относится к третьему классу – классу Аскомицеты (*Ascomycetes*). Порядок *Plectascales*. Семейство *Aspergillaceae*. Род *Aspergillus*. Патогенные виды: *A. fumigatus*, *A. candidus*, *A. roseus*, *A. flavus*, *A. niger*. Аскомицеты – сумчатые грибы (35 000 видов) с многоклеточным мицелием. При половом процессе размножаются аскоспорами (споры, развивающиеся в особых сумках – асках);



**Рис. 1.** Разнообразие форм биологических объектов, растущих на плоскости: популяции микроорганизмов и лишайники

бесполое размножение осуществляется конидиями (экзоспоры, которые несут функцию бесполого размножения у многих грибов).

Вид аспергилл очень широко распространен в природе; он часто встречается на влажных предметах, хлебе, варенье и т. д.

Лабораторную диагностику аспергиллезов проводят путем микроскопического исследования и посева его на питательные среды и культивирования при температуре 25–28° С.

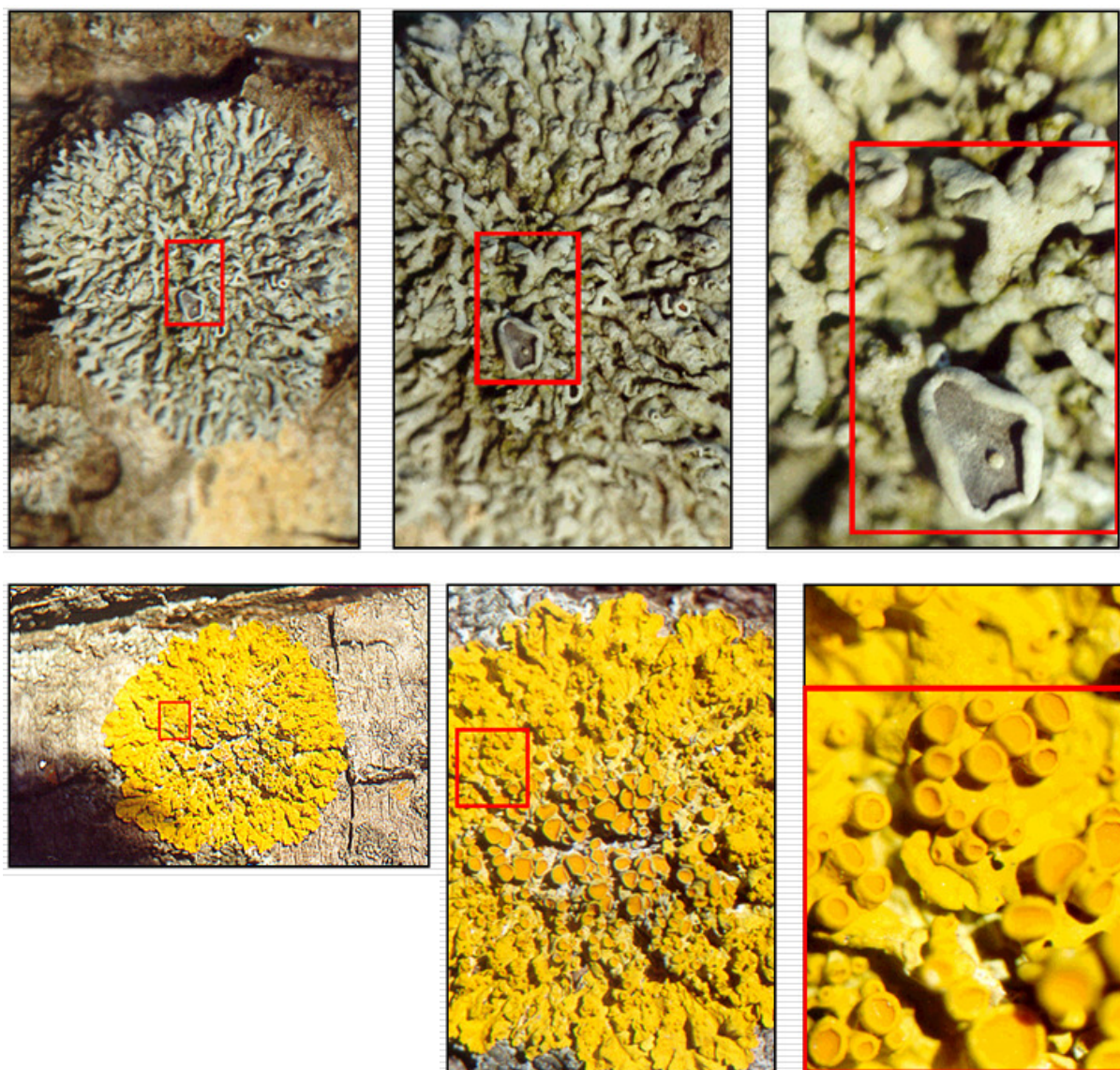
Засев первого и второго образцов, проводили при помощи пассивной воздушной аэрации. Чашечки Петри выставляли на поверхность стола и оставляли в открытом состоянии 50 мин. Затем закрывали и помеща-

ли в темное влажное помещение с температурой воздуха 20–26° С.

При засеве третьего образца имело место лабораторное точечное нанесение микроскопических частичек опытного образца (салат обыкновенный).

Исследование проводили при использовании сложного органического питательного вещества – АГАР-АГАР.

Данное вещество получается из морских водорослей. Основное вещество агар-агара, обладающее желеобразующей способностью, состоит из кальциевой соли, кислого эфира, серной кислоты и углеводного комплекса – полисахарида, в состав которого входят в различных соотношениях арабиноза, глюкоза, галактоза и др.



**Рис. 2.** Фрактальный характер биологических объектов (лишайники)

Агар-агар расплавляется в воде при температуре 80–86° С, а затвердевает – при 36–40° С.

Результаты засева стали заметны приблизительно на вторые сутки от начала эксперимента. Периодичность получения снимков – каждые пять часов – независимо от времени суток.

Съемку проводили на лабораторном столе при искусственном освещении люминесцентной лампы и собственной фотовспышки камеры Casio EX-S600. Разрешение матрицы 6 мегапикселей, разрешение снимков 2816 × 2112 пикселей. При фотосъемке чашки открывали. Общая продолжительность эксперимента 10 дней.

Рост колоний. Эксперименты по динамике роста биологических объектов проводили в три серии. На рис. 3 показаны наиболее характерные фотографии экспериментов 1-й серии. Общее число снимков составляет 32. На рис. 4 показаны наиболее характерные фотографии экспериментов 2-й серии. Общее число снимков составляет 32. На рис. 5 показаны наиболее

характерные фотографии экспериментов 3-й серии. Общее число снимков составляет 7.

**Технология обработки цифровых фотографий.** Полученные в ходе съемки фотографии имеют существенную неравномерность в освещенности (рис. 3–5), что связано с различием в расположении источника света и суточными колебаниями.

Кроме того, объекты подобного типа не являются двумерными, а имеют определенную высоту над плоскостью, т. е. третий размер, вертикальный. При боковом освещении эти колонии часто отбрасывают тени, что создает дополнительные трудности для идентификации краев колоний. Пример такого изображения приведен на рис. 6 а). Видно, что изображение, полученное непосредственно с фотоаппарата, нуждается в коррекции освещенности, удалении дефектов съемки и контрастировании. Эти операции в той или иной степени должны быть применены ко всем снимкам, полученным в ходе экспериментов.

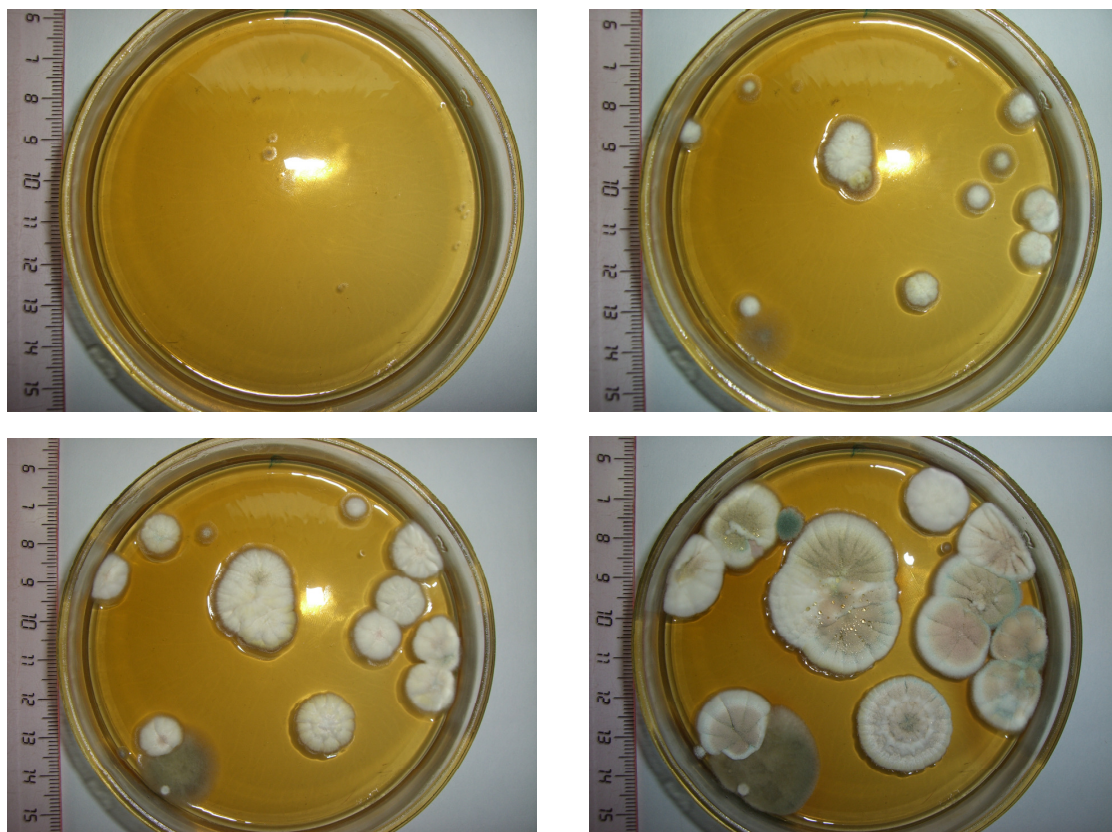


Рис. 3. Динамика роста микроорганизмов. 1-я серия снимков

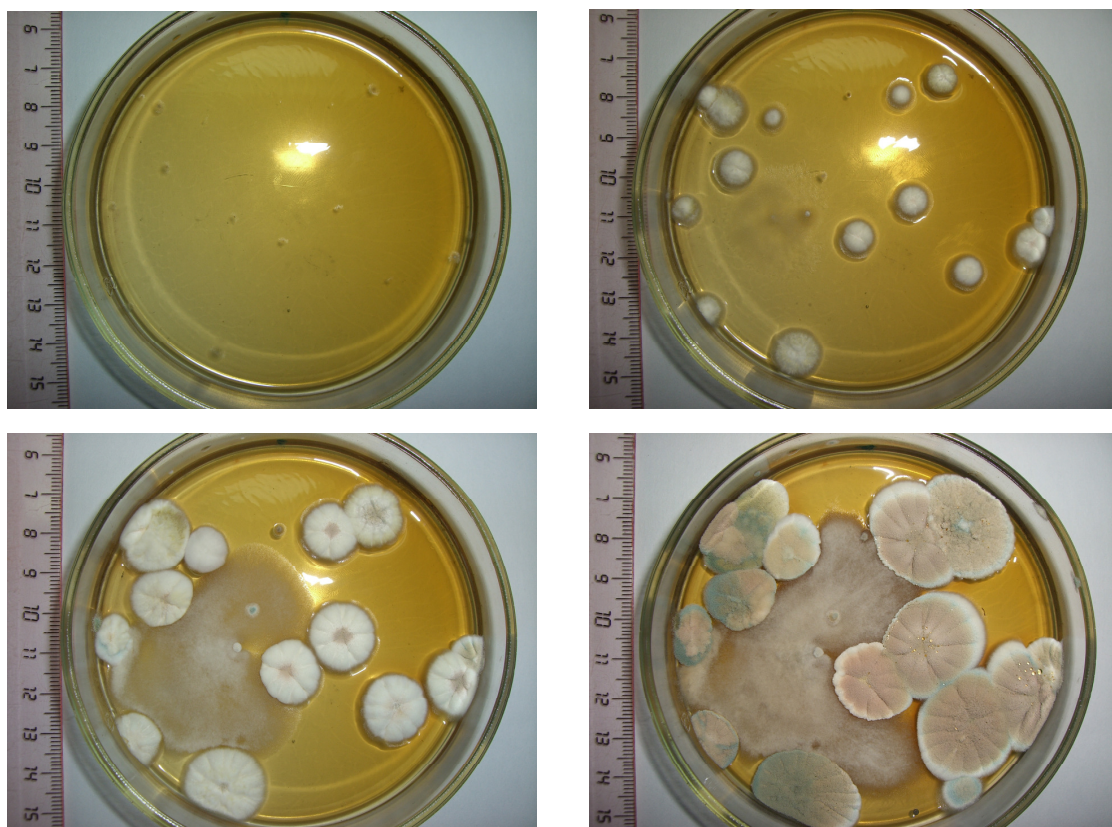


Рис. 4. Динамика роста микроорганизмов. 2-я серия снимков

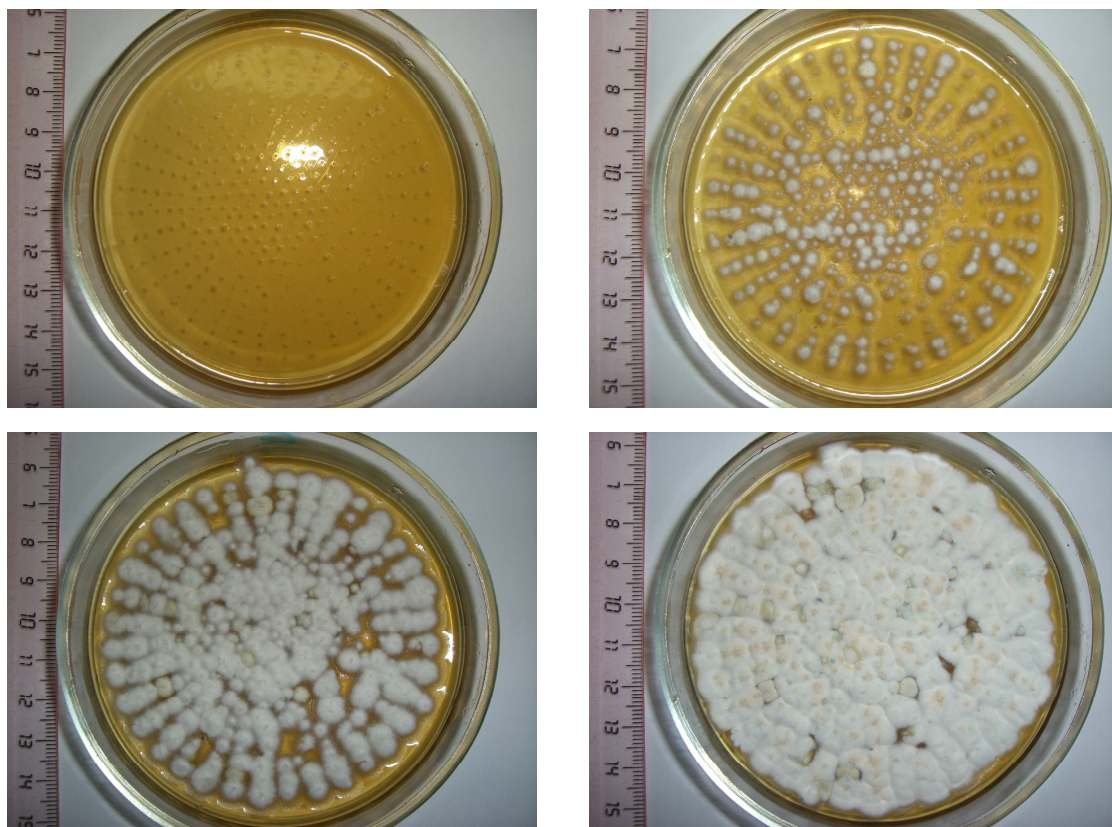


Рис. 5. Динамика роста микроорганизмов. 3-я серия снимков



Рис. 6. Внешний вид колоний до – а) и после – б) обработки

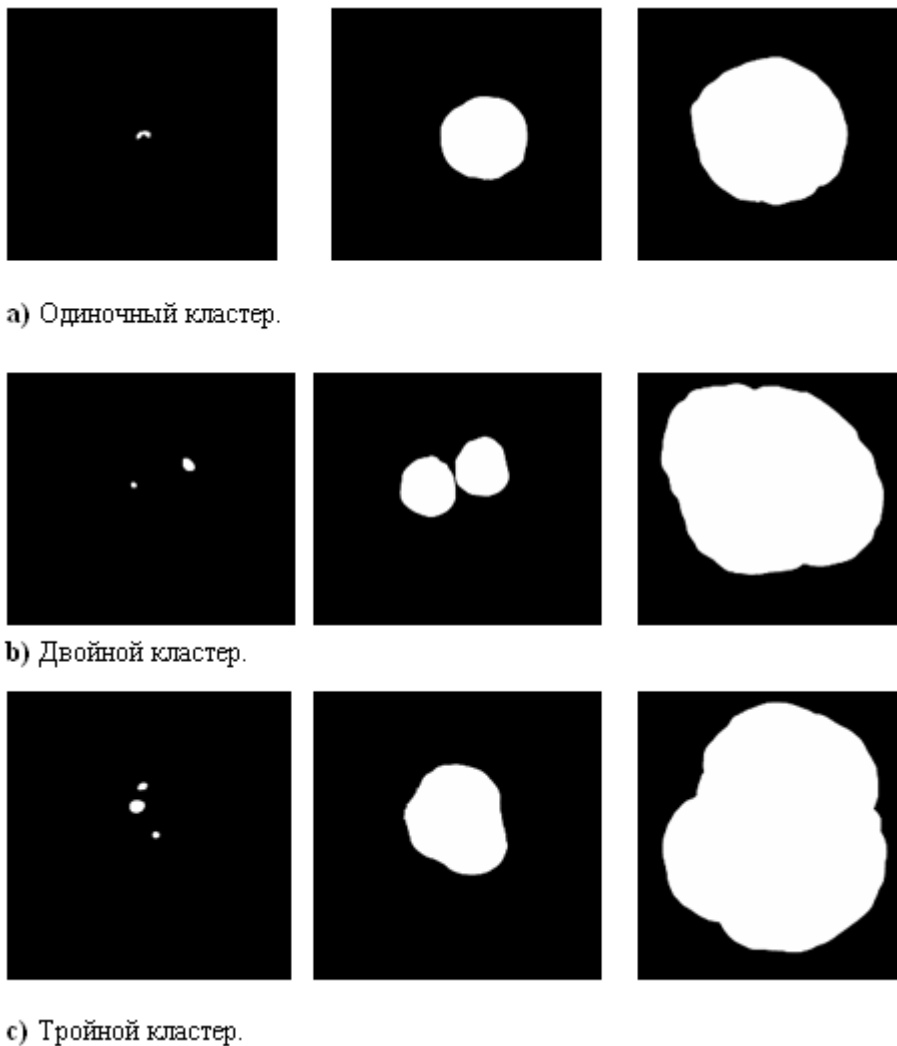


Рис. 7. Различный вид популяций: одиночная колония, двойной и тройной кластеры, в различные моменты времени

Технология предварительной обработки фотографий являлась ручной и была адаптирована с помощью настройки различных фильтров таким образом, чтобы привести фотографии к одинаковой плотности освещенности, так, чтобы границы стали более точными. Это обеспечивало наименьшее искажение морфологических характеристик объекта.

Для обработки изображений использовали программу Adobe Photoshop CS, которая позволила проводить указанные действия в среде Dry Brush. В результате были устранены дефекты освещенности всех снимков и осуществлено их контрастирование (см. рис. 6 б)).

Примеры динамики одиночного, двойного и тройного кластеров, полученные в ходе обработки, приведены на рис. 7.

#### Вычисление площади и усредненного линейного размера колонии.

После коррекции освещенности и контрастирования фотографий (рис. 6, 7), с помощью специальной программы вычисляли площадь  $S$  (в пикселях) и усредненный линейный размер  $L_u$ .

Блок-схема программы представлена на рис. 8, входным параметром является матрица типа BitMap. Далее приведено краткое описание алгоритма.

1. Количество белых (WP) и черных (BP) точек равно нулю, переменным правой ( $r$ ) и нижней ( $d$ ) присваивается значение верхней и левой точек изображения. Верхней ( $u$ ) и левой ( $l$ ) точкам присваиваем нижнюю и правую точку.

2. Начало цикла. Значение  $i$  пробегает весь массив BitMap, начиная с наименьшего значения ординаты.

3. Начало внутреннего цикла. Значение  $j$  пробегает массив BitMap, начиная с наименьшего значения абсциссы.

4. Если точка белая, то переходим на следующий шаг, иначе переход на шаг 7.

5. Увеличиваем количество белых точек (WP) на единицу.

6. Увеличиваем на единицу количество черных точек (BP).

7. Сравниваем значение ординаты ( $i$ ) текущей точки со значением ординаты ( $r$ ) точки стоящей правее от нее. Если оно больше или равно ему, то переходим на шаг вперед, иначе на шаг 10.

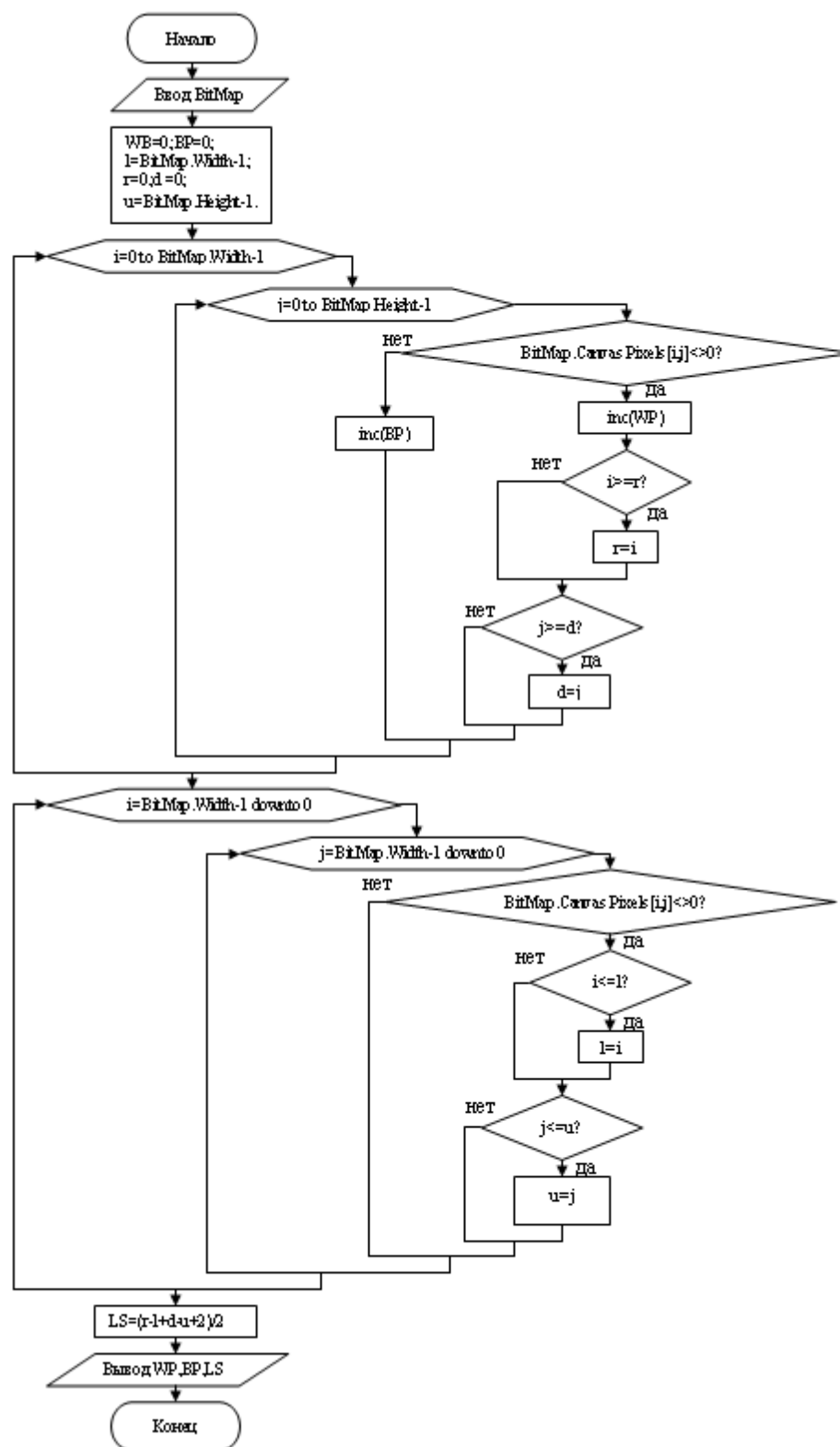


Рис. 8. Блок-схема расчета площади  $S$  в пикселях и усредненного линейного размера  $L_y$

8. Присваиваем значение ординаты ( $i$ ) текущей точки значению ординаты ( $r$ ) точки, стоящей правее от нее.

9. Сравниваем значение абсциссы ( $j$ ) текущей точки со значением абсциссы ( $d$ ) точки, стоящей ниже от нее. Если оно больше или равно ему, то переходим на шаг вперед, иначе на шаг 12.

10. Присваиваем значение абсциссы ( $j$ ) текущей точки значению ординаты ( $d$ ) точки, стоящей ниже от нее. Если абсцисса и ордината текущей точки приняли наибольшее значение, то переход на следующий шаг, иначе на шаг 2.



11. Начало цикла. Значение  $i$  пробегает весь массив BitMap, начиная с наибольшего значения ординаты.

12. Начало внутреннего цикла. Значение  $j$  пробегает массив BitMap, начиная с наибольшего значения абсциссы.

13. Если точка закрашена, то переходим на следующий шаг, иначе переход на шаг 12.

14. Сравниваем значение ординаты ( $i$ ) текущей точки со значением ординаты ( $l$ ) точки стоящей левее от нее. Если оно больше или равно ему, то переходим на шаг вперед, иначе на шаг 17.

15. Присваиваем значение ординаты ( $i$ ) текущей точки значению ординаты ( $l$ ) точки, стоящей левее от нее.

16. Сравниваем значение абсциссы ( $j$ ) текущей точки со значением абсциссы ( $u$ ) точки, стоящей выше от нее. Если оно больше или равно ему, то переходим на шаг вперед, иначе на шаг 19.

17. Присваиваем значение абсциссы ( $j$ ) текущей точки значению ординаты ( $u$ ) точки, стоящей выше от нее. Если абсцисса и ордината текущей точки приняли наименьшее значение, то переход на следующий шаг, иначе на шаг 11.

18. Вычисляем усредненный линейный размер (LS).

19. Выводим количество белых (WP), черных (BP) точек, усредненный линейный размер (LS).

**Алгоритм программы расчета фрактальной размерности.** Точечный метод представляет собой один из возможных подходов к вычислению фрактальной размерности компакта. Главным достоинством следует считать больший, чем у других алгоритмов характеристический параметр и наибольшую скорость вычисления фрактальной размерности, что и послужило основанием для выбора этого метода [7, 8].

Рассмотрим сетку, покрывающую весь компакт. Ее узлы будем называть ячейками. Каждую ячейку, имеющую с компактом непустое пересечение, будем считать за одну точку. Ясно, что именно эта схема реализуется при графическом выводе компакта на экран как массива пикселей. «Подсчет числа точек в клетке» означает подсчет числа пикселей в клетке.

Для упрощения вычислений будем считать клетки квадратными. Размер  $L$  клетки означает число ячеек по каждой стороне. Ограничимся нечетными значениями  $L$ ; в этом случае центральная ячейка будет равноудалена от всех сторон. Сначала вычислим вероятности  $P(m, L)$  того, что клетка размера  $L$  содержит  $m$  точек (ячеек) компакта. Для этого вокруг каждой точки фрактала, считая ее центральной, построим клетку размера  $L$  и подсчитаем число точек, попавших в нее. Предположим, что компакт содержит  $M$  точек. Тогда  $P(m, L)$  равно числу клеток, содержащих  $m$  точек,  $m = 1, \dots, M$ , деленному на  $M$ . Заметим, что сумма всех вероятностей равна единице:  $\sum_{m=1}^M P(m, L) = 1$ .  $N(L)$  есть число клеток размера  $L$ , необходимых для покрытия компакта. Число клеток размера  $L$ , содержащих  $m$  точек, равно  $(M/m)P(m, L)$ . Поэтому оценка числа клеток, покрывающих все изображение, равна:

$$\langle N(L) \rangle = \sum_{m=1}^K (M/m)P(m, L) = M \sum_{m=1}^K (1/m)P(m, L),$$

где  $K$  – возможное число точек в клетке. Следовательно,

$$\tilde{N}(L) = \sum_{m=1}^K (1/m)P(m, L) \text{ и это выражение так-}$$

же пропорционально  $L^{-d}$  и может быть использовано для оценки фрактальной размерности  $dim_M(X)$ .

Блок-схема данного метода приведена на рис. 9. Входными данными для него являются максимальный размер покрытия ( $L_{Max}$ ) и матрица, содержащая исходное изображение (Image). В результате работы вычисляется значение фрактальной размерности исходного изображения.

1. Присваиваем параметру покрытия ( $LM2$ ) значение  $L_{Max}$ , деленное нацело на 2. Присваиваем абсциссе массива ( $I$ ) значение параметра покрытия, увеличенное на единицу. Присваиваем переменной  $W$  ширину изображения. Присваиваем переменной  $H$  высоту изображения.

2. Сравниваем абсциссу массива ( $I$ ) с шириной изображения ( $W$ ) за вычетом параметра покрытия ( $LM2$ ). Если меньше или равно, то переходим на шаг 3, иначе на шаг 14.

3. Присваиваем ординате массива ( $J$ ) значение параметра покрытия, увеличенное на единицу.

4. Сравниваем ординату массива ( $J$ ) с высотой изображения ( $H$ ) за вычетом параметра покрытия ( $LM2$ ). Если меньше или равно, то переходим на шаг 6, иначе на шаг 5.

5. Увеличиваем абсциссу массива ( $I$ ) на единицу. Переходим к шагу 2.

6. Если в элементе изображения  $Image[I, J]$  содержится точка, то переходим на шаг 8, иначе на шаг 7.

7. Увеличиваем ординату массива ( $J$ ) на единицу. Переходим к шагу 4.

8. Устанавливаем значение размера покрытия ( $K$ ) равным единице.

9. Сравниваем размер покрытия ( $K$ ) и параметр покрытия. Если больше, то переходим на шаг 7, иначе на шаг 10.

10. Вычисляем количество точек ( $M$ ) в покрытии с центром в точке ( $I, J$ ) и размером  $K$ .

11. Сравниваем количество точек в покрытии ( $M$ ). Если больше нуля, то переходим на шаг 12, иначе на шаг 13.

12. Увеличиваем на единицу элемент массива вероятностей  $P[M, K]$ .

13. Увеличиваем на единицу размер покрытия ( $K$ ). Переходим к шагу 9.

14. Устанавливаем значение счетчика покрытий ( $L$ ) равным единице.

15. Сравниваем счетчик покрытий ( $L$ ) и параметр покрытия ( $LM2$ ), если меньше или равно, то переходим на шаг 16, иначе шаг 20.

16. Обнуляем значение суммы ( $Sm$ ). Устанавливаем значение счетчика точек ( $M$ ) равным единице.

17. Сравниваем счетчик точек ( $M$ ) с максимальным размером покрытия ( $L_{Max}$ ). Если больше, то переходим на шаг 19, иначе 18.

18. Увеличиваем значение суммы ( $Sm$ ) на  $P[M, L]/M$ . Увеличиваем на единицу счетчик точек ( $M$ ). Переходим к шагу 17.

19. Определяем значение логарифма статистической суммы ( $N[L]$ ). Увеличиваем на единицу счетчик покрытий ( $L$ ). Переходим к шагу 15.

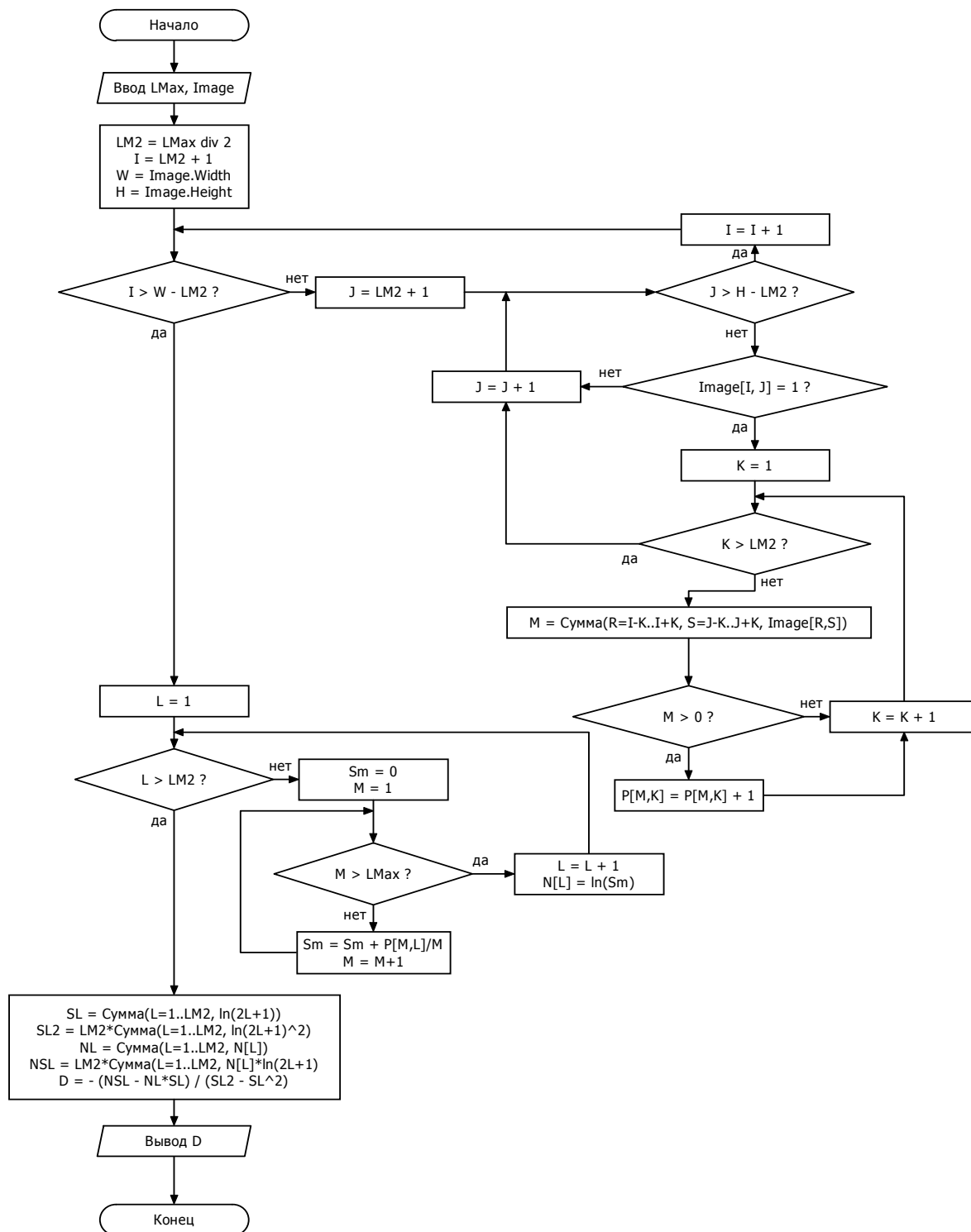


Рис. 9. Блок-схема точечного метода вычисления фрактальной размерности изображения

Производим линейную регрессию по данным о логарифме статистической суммы ( $N[L]$ ) и размерам покрытия. Определяем оценку фрактальной размерности ( $D$ ) изображения по точечному методу.

**4. Полученные результаты и их обсуждение. Характеристики роста колоний.** Для оценки морфоло-

гических и кинетических особенностей роста популяций на основе их фотографий с помощью описанных программ рассчитывались: площадь колоний, усредненный линейный размер колоний и фрактальная размерность их изображений. Зависимости указанных характеристик от времени роста показаны на рис. 10–12.

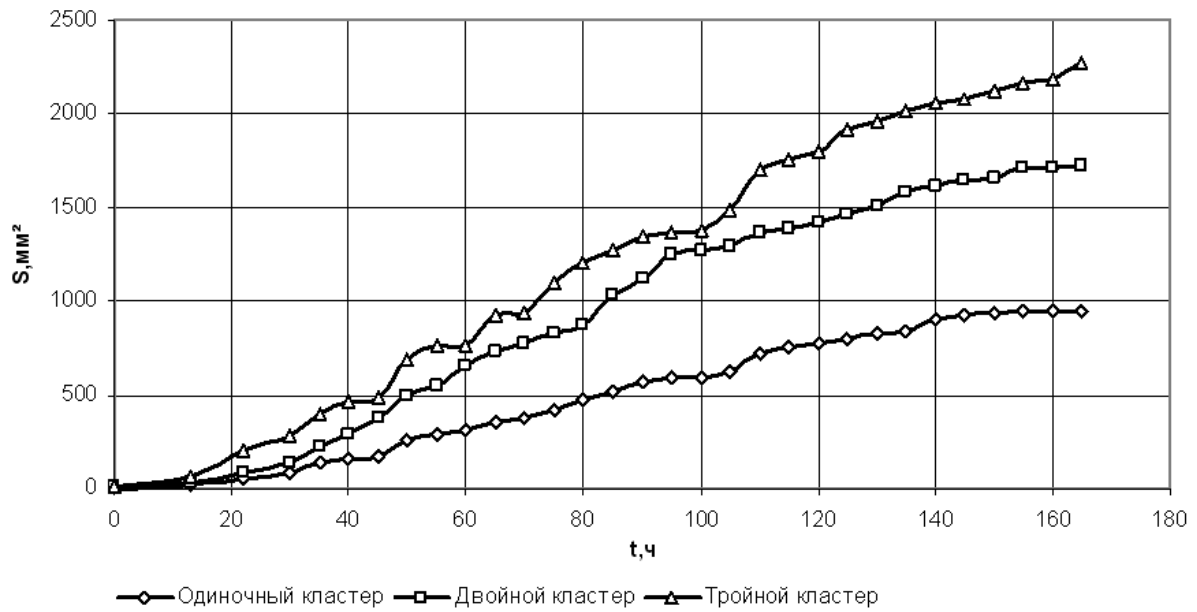


Рис. 10. Графики зависимостей площади колоний от времени роста

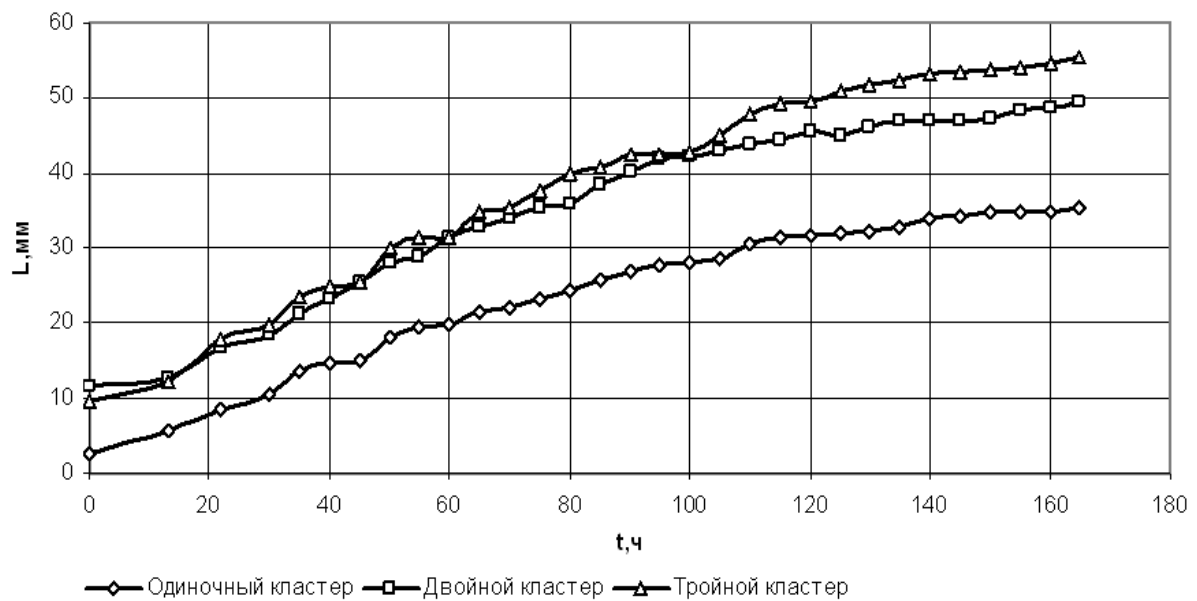


Рис. 11. Графики зависимостей усредненного линейного размера колоний от времени роста

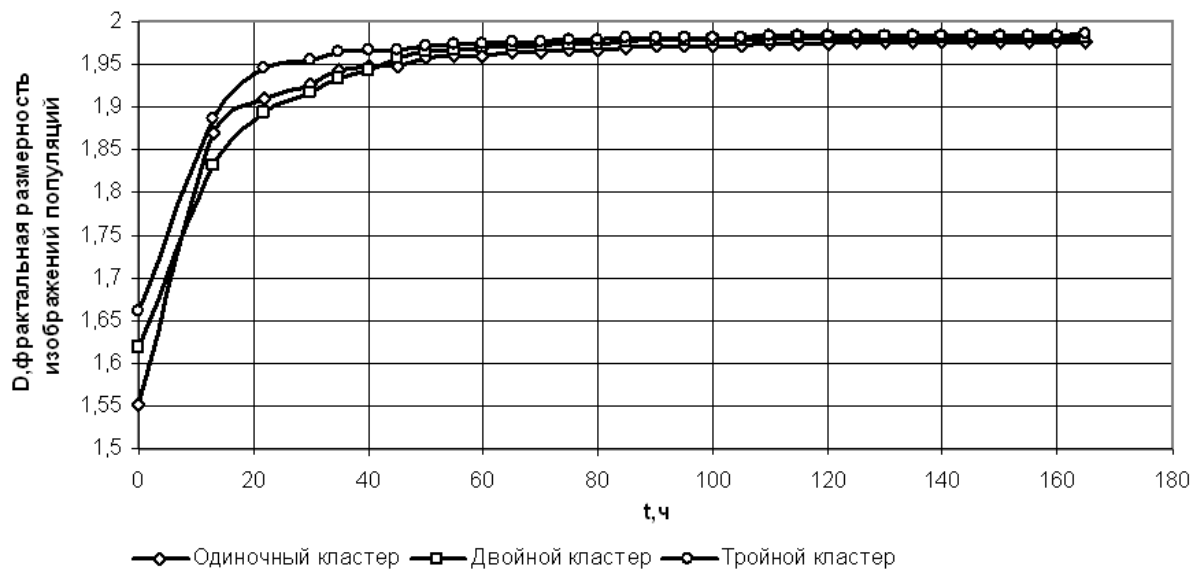


Рис. 12. Графики зависимостей фрактальной размерности колоний от времени роста

Таблица 1

Коэффициенты корреляции морфологических и кинетических показателей роста колоний:  
 $D$  – фрактальная размерность;  $S$ ,  $L_y$  – площадь и усредненный линейный размер популяции

Одиночный кластер				Двойной кластер				Тройной кластер			
	D	S	$L_y$		D	S	$L_y$		D	S	$L_y$
D	1	0,63	0,76	D	1	0,7	0,79	D	1	0,68	0,76
S	0,63	1	0,97	S	0,7	1	0,98	S	0,68	1	0,99
$L_y$	0,76	0,97	1	$L_y$	0,97	0,98	1	$L_y$	0,76	0,99	1

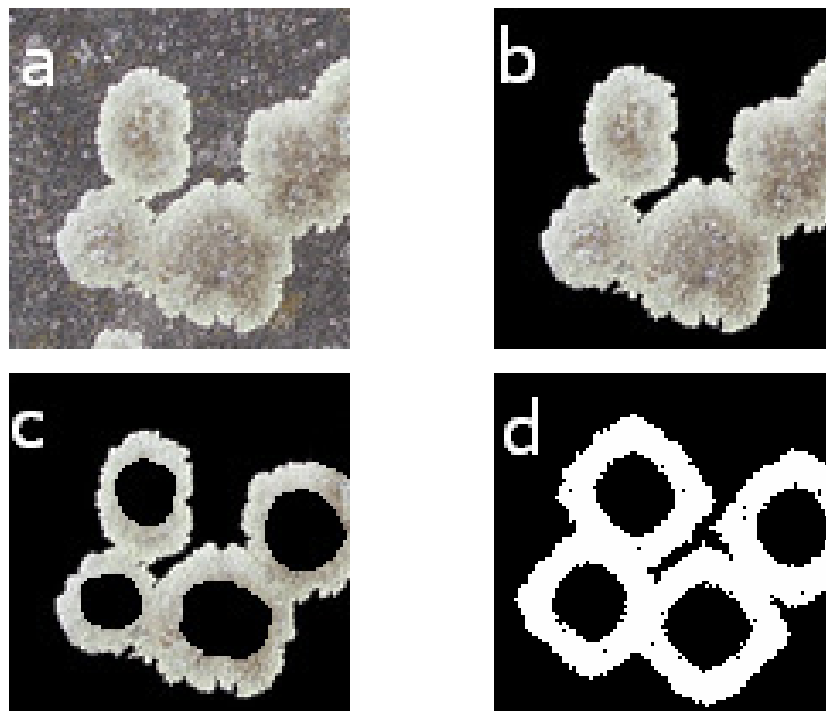
Необходимо отметить, что общий характер зависимостей, представленных на рис. 10 и 11, не противоречит общим представлениям о росте колоний: в лаг-фазе, длительность которой составляет 10–15 ч, скорость изменения этих показателей крайне незначительна; затем наступает период, характеризуемый наибольшей скоростью роста (20–120 ч), и, наконец, наблюдается фаза замедления роста. График фрактальной размерности имеет те же закономерности, которые мы ранее выявили с помощью математической модели [11]. В начале процесса роста колонии наблюдается увеличение фрактальной размерности, а начиная примерно с 50–60 ч этот показатель стабилизируется на значении 1,95–2, характерном для полного заполнения области изображения. В табл. 1 представлены коэффициенты корреляции между данными показателями.

**Сравнение форм колоний, полученных по модели и в эксперименте.** Ранее нами предложена имитационная математическая модель, позволяющая рассчитывать кинетику и формы колоний [10]. Данная модель реализована в виде программы-симулятора. О качественном соответствии форм колоний, полученных по

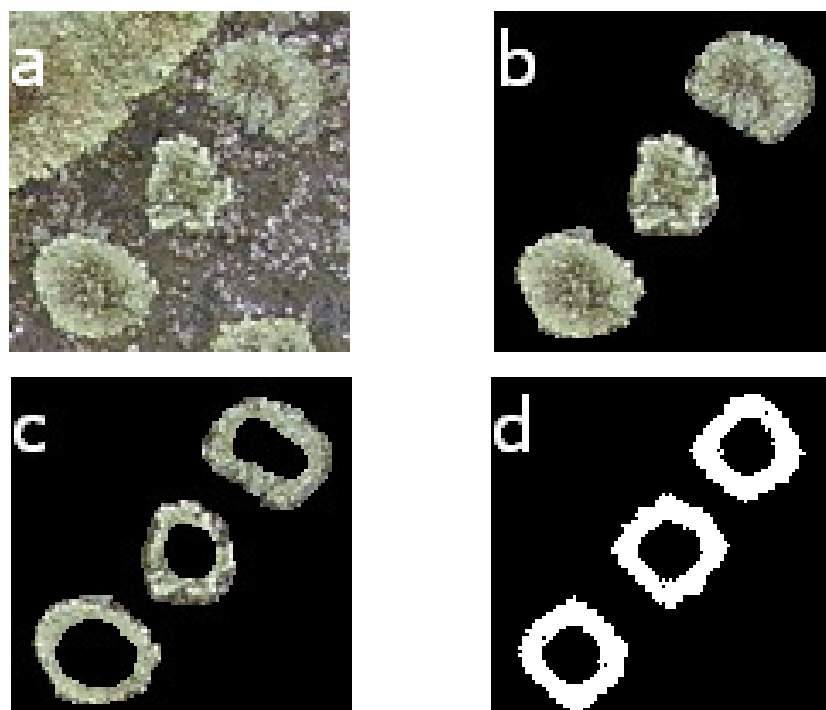
этой модели, реальным мы сообщали в работе [11]. Здесь нам хотелось бы установить соответствие морфологических показателей популяции, получаемой по модели и в эксперименте.

**Лишайники.** Для проверки адекватности модели были выбраны несколько фрагментов изображений (рис. 1), которые отличаются следующими особенностями: а) – наличие внутренних малоактивных областей; б) – взаимодействие нескольких аналогичных объектов; в) – некоторые морфологические особенности, возникающие на границах взаимодействующих объектов.

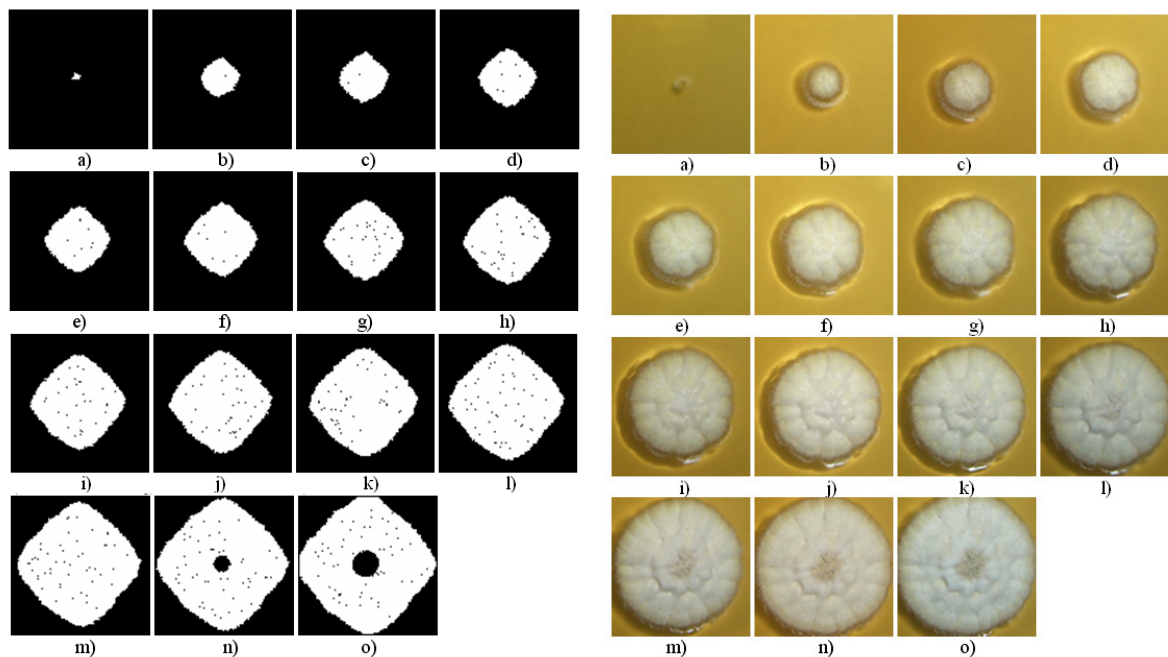
Такие фрагменты показаны на рис. 13 и 14. Их начальное изображение представлено на рис. 13 и 14 (а). Из рисунков видно, что цветовые характеристики подложки, на которой происходит рост лишайников, неоднородны, что затрудняет сравнение исходного изображения с модельным, так как в модельном изображении фон однороден. Далее с помощью коррекции изображения в графическом редакторе мы сделали их фон однородным (см. рис. 13 и 14 (б)). Также на данных рисунках можно увидеть наличие малоактивных областей, имеющих цвет, отличный от основного цвета



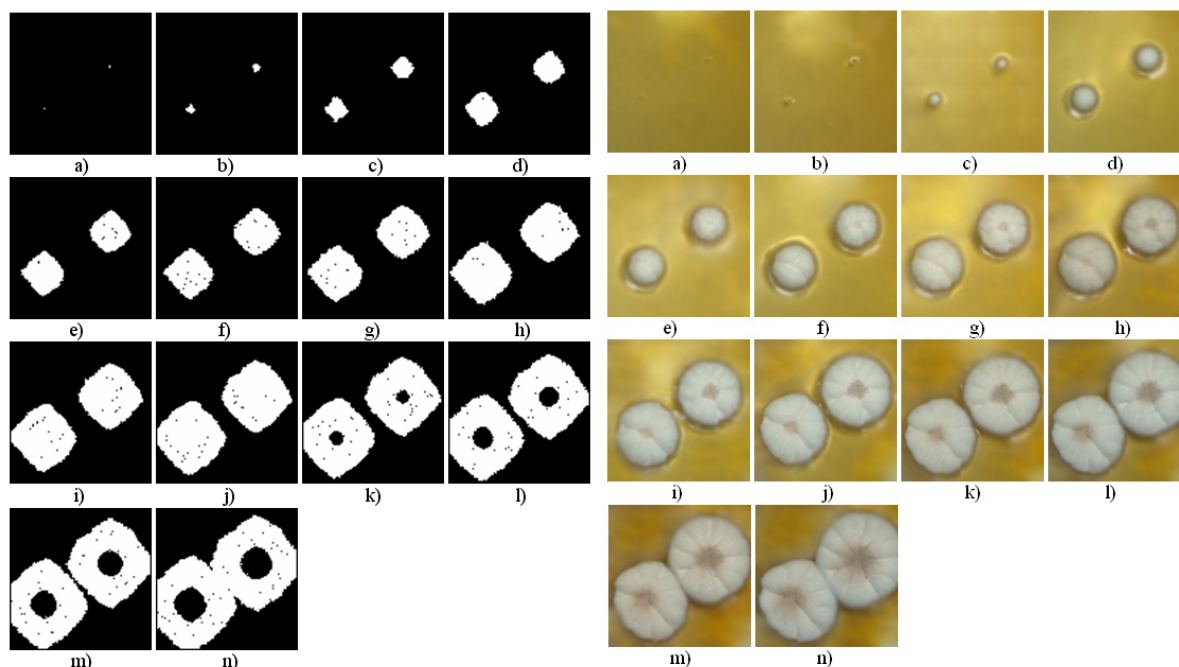
**Рис. 13.** Сравнение форм колоний *Protoparmeliopsis muralis* (Schreber) M. Choisy, полученных в эксперименте и по модели в случае взаимодействия объектов типа 1-1 и 1-2: а – исходное изображение; б – дополнительная обработка (очистка фона); с – дополнительная обработка (удаление внутренних малоактивных областей); д – вычислительный эксперимент при  $Q_0 = 100$ ;  $\Delta Q_- = 1$ ;  $\Delta Q_+ = 0$ ;  $\eta = 0,05$ ;  $\tau_l = 100$ ;  $\tau_d = 10$



**Рис. 14.** Сравнение форм колоний *Protoparmeliopsis muralis* (Schreber) M. Choisy, полученных в эксперименте и по модели в случае полного отсутствия взаимодействия объектов: а – исходное изображение; б – дополнительная обработка (очистка фона); с – дополнительная обработка (удаление внутренних малоактивных областей); д – вычислительный эксперимент при  $Q_0 = 70$ ;  $\Delta Q_- = 1$ ;  $\Delta Q_+ = 0$ ;  $\eta = 0,05$ ;  $\tau_l = 100$ ;  $\tau_d = 10$



**Рис. 15.** Слева – внешний вид популяции, полученный по модели [10] при  $Q_0 = 370$ ;  $\Delta Q_- = 1$ ;  $\Delta Q_+ = 0$ ;  $\eta = 0,05$ ;  $\tau_l = 100$ ;  $\tau_d = 10$  в различные моменты времени: а) – 54, б) – 174, в) – 217, д) – 244, е) – 271, ф) – 298, г) – 326, г) – 353, и) – 380, j) – 407, к) – 429, л) – 456, м) – 483, н) – 510, о) – 537 итераций. Справа – формы колонии плесневых грибов *Aspergillus*, полученные в эксперименте в различные моменты времени: а) – 10, б) – 32, в) – 40, д) – 45, е) – 50, ф) – 55, г) – 60, г) – 65, и) – 70, j) – 75, к) – 79, л) – 84, м) – 89, н) – 94, о) – 99 ч после засева; размер области 2×2 см



**Рис. 16.** Слева – внешний вид популяции, полученный по модели [10] при  $Q_0 = 200$ ;  $\Delta Q_- = 1$ ;  $\Delta Q_+ = 0$ ;  $\eta = 0,05$ ;  $\tau_l = 100$ ;  $\tau_d = 10$  в различные моменты времени: а) – 2, б) – 42, в) – 97, д) – 135, е) – 169, ф) – 190, г) – 211, г) – 232, и) – 254, j) – 275, к) – 296, л) – 317, м) – 334, н) – 355 итераций; одна итерация равняется 852 с. Справа – формы колоний плесневых грибов *Aspergillus*, полученные в эксперименте в различные моменты времени: а) – 0,5, б) – 10, в) – 23, д) – 32, е) – 40, ф) – 45, г) – 50, г) – 55, и) – 60, j) – 65, к) – 70, л) – 75, м) – 79, н) – 84 ч после засева; размер области 3×3 см

популяции, поэтому была проведена обработка изображения с целью увеличения контрастности этих областей (см. рис. 13 и 14 (с)).

Параметры математической модели [10] определяли следующим образом: начальное положение клеток – изображение реальной популяции преобразовывали к размеру  $100 \times 100$  и определяли середины областей распространения каждого центра развития.

На рис. 13 (d) показан внешний вид популяции по прошествии 260 итераций со следующими значениями параметров и начальных условий: начальное количество питательного вещества – 100; скорость потребления питательного вещества – 1; скорость восполнения питательного вещества – 0; коэффициент диффузии – 0,05; среднее значение максимальной продолжительности жизни – 100; среднее значение времени между делениями клетки – 10. Начальное положение клеток – 4 ячейки с координатами (40, 35); (28, 67); (62, 73); (88, 45). Начальный возраст клеток выбирали, исходя из равномерного распределения от 0 до среднего значения максимальной продолжительности жизни. Объяснение этих параметров можно найти в наших работах [10, 11].

На рис. 14 (d) показан внешний вид популяции по прошествии 180 итераций со следующими значениями параметров и начальных условий: начальное количество питательного вещества – 70; скорость потребления питательного вещества – 1; скорость восполнения питательного вещества – 0; коэффициент диффузии – 0,05; среднее значение максимальной продолжительности жизни – 100; среднее значение времени между делениями клетки – 10. Начальное положение клеток – 3 ячейки с координатами (74, 20); (52, 50); (24, 81). Начальный возраст клеток выбирали, исходя из равномерного распределения от 0 до среднего значения максимальной продолжительности жизни.

Из сравнения рис. 13 с и 13 d хорошо видно, что форма популяции в модельном эксперименте качественно соответствует форме популяции, растущей на плоскости. Соответствия наблюдаются в размере характерных неровностей на границе области распространения. Как в экспериментальной, так и в модельной популяции имеются «усы» на стыке трех областей распространения. Столкновения областей распространения имеют много общего для экспериментальной и модельной популяции. Разницу в размерах отдельных областей распространения в экспериментальной и модельной популяции можно объяснить тем, что засев в реальной популяции мог осуществляться в различные периоды времени, в то время как в модели все клетки появляются одновременно. Также внутри областей распространения в эксперименте имеются темные пятна, связанные с малоактивными областями, эти же области хорошо заметны и в модели.

Из сравнения рис. 14 с и 14 d видно соответствие размера областей в реальной и модельной популяции, а также характерных неровностей на границе и размеров внутренних областей, где находятся малоактивные области популяции.

**Колонии микроорганизмов.** Теперь оценим соответствие форм колоний, получаемых по модели и в эксперименте для плесневых грибов (*Aspergillus*).

Параметры математической модели определяли следующим образом: начальное положение клеток – изображение реальной популяции преобразовывали к

размеру  $100 \times 100$  и определяли середины областей распространения для каждого центра развития. Интервалы времени определяли следующим образом: нулевая итерация приравнивалась времени засева, далее определялось соответствие модельного и реального изображения соответствующего в конце эксперимента и из этого определялось соотношение между временем в модели и временем роста реальной популяции.

На рис. 15 слева изображен внешний вид модельной популяции со следующими значениями параметров и начальных условий: начальное количество питательного вещества – 370; скорость потребления питательного вещества – 1; скорость восполнения питательного вещества – 0; коэффициент диффузии – 0,05; среднее значение максимальной продолжительности жизни – 100; среднее значение времени между делениями клетки – 10. Начальное положение клеток – 1 ячейка с координатами (48, 49). Начальный возраст клеток выбирали исходя из равномерного распределения от 0 до среднего значения максимальной продолжительности жизни. Одна итерация равнялась  $663^\circ \text{C}$ .

На этом же рисунке (рис. 15, справа) изображен внешний вид популяции плесневых грибов *Aspergillus*, полученной при помощи пассивной воздушной аэрации в помещении.

Сравнивая изображения, полученные по модели и в эксперименте, можно сделать вывод об их морфологическом соответствии.

На рис. 16 слева изображен внешний вид модельной популяции (двойного кластера) со следующими значениями параметров и начальных условий: начальное количество питательного вещества – 200; скорость потребления питательного вещества – 1; скорость восполнения питательного вещества – 0; коэффициент диффузии – 0,05; среднее значение максимальной продолжительности жизни – 100; среднее значение времени между делениями микроорганизма – 10. Начальное положение клеток – 2 ячейки с координатами (24, 67) и (70, 38). Начальный возраст клеток выбирали исходя из равномерного распределения от 0 до среднего значения максимальной продолжительности жизни.

На этом же рисунке справа изображен внешний вид популяции плесневых грибов *Aspergillus*, полученной при помощи пассивной воздушной аэрации в помещении.

Сравнивая изображения, полученные по модели и в эксперименте на рис. 15 и 16, можно сделать вывод об их морфологическом соответствии.

Соответствие наблюдается как в размерах, так и в форме популяции, небольшие отклонения от округлых форм в модельной популяции объясняются дискретностью сетки и учетом взаимодействия только с четырьмя ближайшими ячейками. Столкновения областей распространения рис. 16 имеют много общего для экспериментальной и модельной популяции и имеют одинаковую динамику. Внутри областей распространения в эксперименте имеются темные пятна, связанные с малоактивными областями, также эти области хорошо заметны и в модели и развиваются похожим образом.

Таким образом, можно утверждать, что математическая модель роста биологических объектов на плоскости, разработанная нами ранее [10], позволяет адекватно описывать кинетику и морфологию таких объектов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Арзамасцев А.А., Слетков Д.В., Ушакова Е.В.* Использование фрактальной геометрии для моделирования формообразования природных объектов // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XV Междунар. науч. конф. Тамбов, 2002. Т. 6. Секция 11. С. 192-194.
2. *Арзамасцев А.А., Ушакова Е.В., Слетков Д.В., Исаева И.В.* О существовании зависимости фрактальной размерности изображений биологических объектов от их морфологических характеристик // Компьютерное моделирование в естественных и технических науках: материалы IV Всерос. науч. интернет-конф. (апрель-май 2002 г.). Тамбов, 2002. С. 9-11.
3. *Арзамасцев А.А., Ушакова Е.В., Слетков Д.В., Исаева И.В.* Зависимость фрактальной размерности изображений биологических объектов от их морфологических и физиологических характеристик // Актуальные проблемы информатики и информационных технологий: материалы Российской (VI Тамб. межвуз.) науч.-практ. конф. Тамбов, 2002. С. 6-9.
4. *Арзамасцев А.А., Слетков Д.В., Исаева И.В.* Связь морфологического параметра с основными характеристиками роста популяции микроорганизмов // Электронный журнал «Исследовано в России». 2003. 178. С. 2150-2156. Режим доступа: <http://zhurnal.arelam.ru/articles/2003/178.pdf>. Загл. с экрана.
5. *Арзамасцев А.А., Слетков Д.В., Ушакова Е.В., Исаева И.В.* О существовании зависимости фрактальной размерности изображений биологических объектов от их морфологических характеристик // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2003. Т. 8, вып. 1. С. 189-190.
6. *Арзамасцев А.А., Слетков Д.В.* Зависимость морфологического параметра от основных характеристик роста колонии микроорганизмов // Интеллектуализация обработки информации. ИОИ-2004: тез. докл. междунар. науч. конф. Симферополь, 2004. С. 17.
7. *Слетков Д.В., Арзамасцев А.А.* Сравнение алгоритмов вычисления фрактальной размерности // III Междунар. конф. «Микромеханизмы пластичности, разрушения и сопутствующих явлений» (МРФР) на базе ХLI Междунар. семинара «Актуальные проблемы прочности»: сб. тез. докл. Тамбов, 2003. С. 202-203.
8. *Слетков Д.В., Арзамасцев А.А.* Сравнение различных алгоритмов вычисления фрактальной размерности // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2003. Т. 8, вып. 2. С. 282-285.
9. *Слетков Д.В., Арзамасцев А.А.* Дискретная математическая модель формообразования колонии микроорганизмов, растущих на плоскости // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2005. Т. 10, вып. 2. С. 193-195.
10. *Слетков Д.В., Арзамасцев А.А.* Дискретная модель роста популяции микроорганизмов на плоскости // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. X Державинские чтения: материалы науч. конф. преподавателей и аспирантов. Тамбов, 2005. Т. 10, вып. 1. С. 112.
11. *Слетков Д.В., Арзамасцев А.А.* Морфология и кинетика роста колоний микроорганизмов на плоскости. Результаты вычислительного эксперимента // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2005. Т. 10, вып. 3. С. 277-291.

Поступила в редакцию 4 декабря 2006 г.